

综合复习（一）（练习）

一、一元二次方程

练习

1. 下列方程中，① $2x^2 - 5 = 0$ ，② $2x^2 + \frac{1}{x} - 3 = 0$ ，③ $x^2 + 2x + 81 = 0$ ，④ $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3}$ ，⑤ $x^2 + 2x + 2\sqrt{x^2 + 2x} - 3 = 0$ ，一元二次方程是_____。

【答案】①③

【解析】形如 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的等式方程为一元二次方程。

【标注】【知识点】一元二次方程的定义

2. 下列关于 x 的方程：① $ax^2 + bx + c = 0$ ；② $3(x - 9)^2 - (x + 1)^2 = 1$ ；③ $x + 3 = \frac{2}{x}$ ；④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ ；⑤ $\sqrt{x + 1} = x - 1$ ，其中一元二次方程的个数是（ ）。
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】①当 $a = 0$ 时， $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元一次方程；

② $3(x - 9)^2 - (x + 1)^2 = 1$ 是一元二次方程；

③ $x + 3 = \frac{2}{x}$ 是分式方程；

④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ 是一元二次方程；

⑤ $\sqrt{x + 1} = x - 1$ 是无理方程。

故选：B。

【标注】【知识点】一元二次方程的定义

3. 已知 $x = 1$ 是一元二次方程 $(m^2 - 1)x^2 - mx + m^2 = 0$ 的一个根，那么 m 的值是（ ）。
- A. $\frac{1}{2}$ 或 -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ 或 1 D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】 将 $x = 1$ 代入方程中有： $m^2 - 1 - m + m^2 = 0$ ，

$$2m^2 - m - 1 = 0，$$

$$(2m + 1)(m - 1) = 0，$$

$$\therefore m = 1 \text{ 或 } -\frac{1}{2}，$$

$$\text{又} \because m^2 - 1 \neq 0，$$

$$\therefore m \neq \pm 1，$$

$$\text{综上 } m = -\frac{1}{2}。$$

故选B。

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

4. 若关于 x 的方程 $x^2 + mx - 3n = 0$ 的一个根是 3，则 $m - n$ 的值是（ ）。

A. -1

B. -3

C. 1

D. 3

【答案】 B

【解析】 将 $x = 3$ 代入 $x^2 + mx - 3n = 0$ 得，

$$9 + 3m - 3n = 0，$$

$$\therefore 3(m - n) = -9，$$

$$m - n = -3。$$

故选B。

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

5. 若 m 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根，则 $6m^2 - 9m + 2016$ 的值为 _____。

【答案】 2019

【解析】 $\because m$ 是方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一个根，

$$\therefore \text{代入得：} 2m^2 - 3m - 1 = 0，$$

$$\therefore 2m^2 - 3m = 1，$$

$$\therefore 6m^2 - 9m + 2016 = 3(2m^2 - 3m) + 2016 = 3 \times 1 + 2016 = 2019。$$

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

6. 已知实数 a 为方程 $x^2 - 2x - 2017 = 0$ 的正根，则代数式 $\frac{2017}{2 + \frac{2017}{a}} + 1$ 的值为 _____。

【答案】 $\sqrt{2018}$

【解析】 原式 $= \frac{2017}{\frac{2a+2017}{a}} + 1 = \frac{2017}{\frac{a^2}{a}} + 1 = \frac{2017}{a} + 1$
 $= \frac{a^2 - 2a}{a} + 1 = a - 2 + 1 = a - 1$,
 $\because a$ 是 $x^2 - 2a - 2017$ 的根 ,
 $\therefore a = \sqrt{2018} + 1$,
 $\therefore$ 原式 $= \sqrt{2018}$.

【标注】 【知识点】 利用根求代数式的值

7. 已知 a, b 是方程 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个根 , 则代数式 $2a^3 + b^2 + 3a^2 - 11a - b + 2000$ 的值为 _____ .

【答案】 2018

【解析】 $\because a, b$ 是方程 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个根 ,
 $\therefore a^2 - a - 3 = 0, b^2 - b - 3 = 0$ 即 $a^2 = a + 3, b^2 = b + 3$,
 $\therefore 2a^3 + b^2 + 3a^2 - 11a - b + 2000$
 $= 2a(a + 3) + b + 3 + 3(a + 3) - 11a - b + 2000$
 $= 2a^2 - 2a + 2012$
 $= 2(a + 3) - 2a + 2012$
 $= 2a + 6 - 2a + 2012$
 $= 2018$.
故答案为 : 2018 .

【标注】 【知识点】 利用根求代数式的值

8. 若 a 为方程 $x^2 + x - 5 = 0$ 的解 , 则 $a^2 + a + 1$ 的值为 () .

A. 12

B. 6

C. 9

D. 16

【答案】 B

【解析】 $\because a$ 为方程 $x^2 + x - 5 = 0$ 的解 ,
 $\therefore a^2 + a - 5 = 0$,
 $\therefore a^2 + a = 5$,
则 $a^2 + a + 1 = 5 + 1 = 6$.
故选 : B .

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

9. m 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的根, 则式子 $m^3 + 2m^2 + 2017$ 的值为 () .

A. 2017

B. 2018

C. 2019

D. 2020

【答案】B

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

10. 实数 a, b 满足: $a^2 - 7a + 2 = 0$, $b^2 - 7b + 2 = 0$, 且 $a \neq b$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} =$ _____ .

【答案】 $\frac{45}{2}$

【解析】略

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习

11. 用配方法解方程 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 时, 原方程应变形为 () .

A. $(x+2)^2 = 3$

B. $(x-2)^2 = 3$

C. $(x+2)^2 = 5$

D. $(x-2)^2 = 5$

【答案】A

【解析】 $x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 4 + 1 = (x+2)^2 - 3 = 0$, 即 $(x+2)^2 = 3$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

12. 按要求解下列一元二次方程:

(1) 解方程: $2x^2 + 4x - 7 = 0$ (配方法) .

(2) 解方程: $2x^2 - 3x + 2 = 0$ (公式法) .

(3) 解方程: $x^2 - 7x + 10 = 0$ (用适当方法) .

(4) 解方程: $5(x+1)^2 = 7(x+1)$ (用适当方法) .

【答案】(1) $x = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

(2) 此方程没有实数解 .

(3) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

(4) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{5}$.

【解析】(1) $2x^2 + 4x - 7 = 0$,

$$x^2 + 2x = \frac{7}{2} ,$$

$$x^2 + 2x + 1 = \frac{9}{2} ,$$

$$(x+1)^2 = \frac{9}{2} ,$$

$$x = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} .$$

(2) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\therefore a = 2 , b = -3 , c = 2 .$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0 ,$$

$\therefore$ 此方程没有实数解 .

(3) $x^2 - 7x + 10 = 0$,

$$\therefore (x-2)(x-5) = 0 ,$$

$$\therefore x_1 = 2 , x_2 = 5 .$$

(4) $\therefore 5(x+1)^2 = 7(x+1)$,

$$\therefore 5(x+1)^2 - 7(x+1) = 0 ,$$

$$\therefore (x+1)[5(x+1) - 7] = 0 ,$$

$$\therefore (x+1)(5x-2) = 0 ,$$

$$\therefore x_1 = -1 , x_2 = \frac{2}{5} .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

13. 解下列方程 :

(1) $2x^2 + 8x - 1 = 0$ (公式法) .

(2) $x^2 + 4x - 5 = 0$ (配方法) .

【答案】(1) $x = \frac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{2}$.

(2) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

【解析】(1) $\therefore a = 2$, $b = 8$, $c = -1$,

$$\therefore \Delta = 64 - 4 \times 2 \times (-1) = 72 > 0 ,$$

$$\text{则 } x = \frac{-8 \pm 6\sqrt{2}}{4} = \frac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{2} .$$

(2) $\therefore x^2 + 4x - 5 = 0$,

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 9 ,$$

$$\therefore (x+2)^2 = 9 ,$$

$$\therefore x+2 = \pm 3 ,$$

$$\therefore x_1 = -5 , x_2 = 1 .$$

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

14. 解方程： $(2x^2 + x)^2 - 2(2x^2 + x) = 3$.

【答案】 $x_1 = 1 , x_2 = -\frac{3}{2}$.

【解析】 设 $2x^2 + x = m$, 则原方程化为 $m^2 - 2m - 3 = 0$, 即 $(m-3)(m+1) = 0$, 代回可得 :

$$(2x^2 + x - 3)(2x^2 + x + 1) = 0 , \text{ 即 } 2x^2 + x - 3 = 0 \text{ 或 } 2x^2 + x + 1 = 0 .$$

$$2x^2 + x - 3 = 0 , \text{ 可化为 } (2x+3)(x-1) = 0 , \text{ 解得 } x_1 = 1 , x_2 = -\frac{3}{2} ;$$

$$2x^2 + x + 1 = 0 , \text{ 用公式法解决 , } \Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0 , \text{ 故此方程无实数根 .}$$

$$\text{综上所述方程解为 : } x_1 = 1 , x_2 = -\frac{3}{2} .$$

$$\text{故答案为 : } x_1 = 1 , x_2 = -\frac{3}{2} .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

15. 已知等腰三角形的腰和底的长分别是一元二次方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的根 , 则该三角形的周长可以是 () .

A. 5

B. 7

C. 5或7

D. 10

【答案】 B

【解析】 解方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$,

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\text{解得 } x_1 = 3 , x_2 = 1 .$$

$\therefore$ 当底为3 , 腰为1时 , 由于 $3 > 1+1$, 不符合三角形三边关系 , 不能构成三角形 .

$\therefore$ 等腰三角形的底为1 , 腰为3 .

$\therefore$ 三角形的周长为 $1+3+3=7$.

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

16. 若关于 x 的一元二次的方程 $kx^2 - 3x - 2 = 0$ 有实数根 , 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $k \geq -\frac{9}{8}$

B. $k \leq -\frac{9}{8}$

C. $k \geq -\frac{9}{8}$ 且 $k \neq 0$

D. $k \leq -\frac{9}{8}$ 且 $k \neq 0$

【答案】 C**【解析】** $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 3x - 2 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$$

$$\text{即: } 9 + 8k \geq 0,$$

$$\text{解得: } k \geq -\frac{9}{8},$$

 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 3x - 2 = 0$ 中 $k \neq 0$,故答案为: $k \geq -\frac{9}{8}$ 且 $k \neq 0$. 故选 C.**【标注】** 【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数17. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + (3k+1)x + 2k+1 = 0$.

(1) 求证: 该方程必有两个实数根.

(2) 若该方程只有整数根, 求 k 的整数值.**【答案】** (1) 证明见解析.(2) $k = \pm 1$.**【解析】** (1) 依题可知, $kx^2 + (3k+1)x + 2k+1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, $k \neq 0$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3k+1)^2 - 4k(2k+1) = (k+1)^2 \geq 0,$$

 $\therefore$ 该方程必有两个实数根.

$$(2) \quad x = \frac{-(3k+1) \pm \sqrt{(k+1)^2}}{2k} = \frac{-(3k+1) \pm (k+1)}{2k},$$

$$x_1 = \frac{-(3k+1) + (k+1)}{2k} = -1, \quad x_2 = \frac{-(3k+1) - (k+1)}{2k} = -2 - \frac{1}{k}.$$

 $\because$ 方程只有整数根, $\therefore -2 - \frac{1}{k}$ 应为整数, 即 $\frac{1}{k}$ 应为整数. $\therefore k$ 为整数, $\therefore k = \pm 1$.**【标注】** 【知识点】一元二次方程根的判别式18. 已知: 关于 x 的方程 $2x^2 + kx - 1 = 0$.

(1) 求证: 方程有两个不相等的实数根.

(2) 若方程的一个根是 $x = -1$, 求另一个根及 k 值.

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $\frac{1}{2}$, $k = 1$.

【解析】 (1) $\because a = 2$, $b = k$, $c = -1$

$$\therefore \Delta = k^2 - 4 \times 2 \times (-1) = k^2 + 8 ,$$

$$\because \text{无论 } k \text{ 取何值, } k^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore k^2 + 8 > 0 , \text{ 即 } \Delta > 0 ,$$

$\therefore$ 方程 $2x^2 + kx - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 .

(2) 把 $x = -1$ 代入原方程得 , $2 - k - 1 = 0$

$$\therefore k = 1 ,$$

$$\therefore \text{原方程化为 } 2x^2 + x - 1 = 0 ,$$

$$\text{解得 : } x_1 = -1 , x_2 = \frac{1}{2} ,$$

$$\text{即另一个根为 } \frac{1}{2} .$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

19. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m + 3)x + m + 2 = 0$.

(1) 求证 : 方程总有两个实数根 .

(2) 若方程的两个实数根都是正整数 , 求 m 的最小值 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) m 的最小值为 -1 .

【解析】 (1) 依题意 , 得

$$\Delta = [-(m + 3)]^2 - 4(m + 2)$$

$$= m^2 + 6m + 9 - 4m - 8$$

$$= (m + 1)^2 .$$

$$\because (m + 1)^2 \geq 0 ,$$

$$\therefore \Delta \geq 0 .$$

$\therefore$ 方程总有两个实数根 .

(2) 解方程 , 得 $x_1 = 1$, $x_2 = m + 2$,

$\because$ 方程的两个实数根都是正整数 ,

$$\therefore m + 2 \geq 1 .$$

$$\therefore m \geq -1 .$$

$\therefore m$ 的最小值为 -1 .

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2 - mx + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m \neq 1$ 且 $m \neq 2$

【解析】 $\because$ 方程为一元二次方程，

$$\therefore m-1 \neq 0, \text{ 即 } m \neq 1,$$

$\because$ 方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 > 0,$$

$$\therefore m \neq 2,$$

综合得 $m \neq 1$ 且 $m \neq 2$.

故答案为： $m \neq 1$ 且 $m \neq 2$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

21. 若关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 9 = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围是().

- A. $k < 1$ B. $k \leq 1$ C. $k < 1$ 且 $k \neq 0$ D. $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$

【答案】B

【解析】(1) 当 $k = 0$ 时， $-6x + 9 = 0$ ，解得 $x = \frac{3}{2}$ ；

(2) 当 $k \neq 0$ 时，此方程是一元二次方程，

$\because$ 关于 x 的方程 $kx^2 - 6x + 9 = 0$ 有实数根，

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4k \times 9 \geq 0, \text{ 解得 } k \leq 1,$$

由(1)、(2)得， k 的取值范围是 $k \leq 1$.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

22. 若关于 x 的方程 $kx^2 - 2x - 1 = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围是().

- A. $k \geq -1$ B. $k \geq -1$ 且 $k \neq 0$ C. $k \leq 1$ D. $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$

【答案】A

【解析】(1) 当 $k = 0$ 时，方程为一元一次方程，必有实数根；

(2)当 $k \neq 0$ 时, 方程为一元二次方程,

当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有实数根,

$$\Delta = 4 - 4k(-1) \geq 0,$$

解得 $k \geq -1$,

综上所述, $k \geq -1$,

故选A.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

23. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 4x + 1 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是().

A. $k < 5$

B. $k \geq 5$, 且 $k = 1$

C. $k \leq 5$, 且 $k \neq 1$

D. $k > 5$

【答案】 C

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 4x + 1 = 0$ 有实数根,

$$\therefore \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta = 4^2 - 4(k-1) \geq 0 \end{cases}$$

解得: $k \leq 5$ 且 $k \neq 1$.

故选C.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

24. 若关于 x 的一元二次方程 $(k+1)x^2 - 4x - 1 = 0$ 有两个不相等的根, 则 k 的取值范围是().

A. $k > -5$

B. $k > -5$ 且 $k \neq -1$

C. $k < -5$

D. $k \geq -5$ 且 $k \neq -1$

【答案】 B

【解析】 根据题意得 $k+1 \neq 0$ 且 $\Delta = (-4)^2 - 4(k+1) \times (-1) > 0$,

所以 $k > -5$ 且 $k \neq -1$.

故选B.

【标注】【知识点】由一元二次方程根的情况确定参数

25. 已知 m 、 n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 - mn + 3m + n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8

【解析】 解: 由 m 、 n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根,

得 $m+n=-2$, $mn=-5$, 且 $m^2+2m-5=0$,

因此 $m^2-mn+3m+n$

$$= (m^2+2m-5) + m+n-mn+5$$

$$= 0-2+5+5$$

$$= 8.$$

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

26. 若一元二次方程 $x^2+5x+2=0$ 有两个根 x_1, x_2 , 则 $(2x_1+1)(2x_2+1)=$ _____, $x_1^2+x_2^2=$ _____, $x_1^2+x_1x_2+5x_1=$ _____.

【答案】 $-1; 21; 0$

【解析】 由韦达定理知 $x_1+x_2=-\frac{5}{1}=-5$, $x_1 \cdot x_2=\frac{2}{1}=2$,

$$\therefore (2x_1+1)(2x_2+1)=4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1=4 \times 2+2 \times (-5)+1=-1,$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-5)^2-2 \times 2=21.$$

$$x_1^2+x_1x_2+5x_1=(x_1^2+5x_1)+x_1x_2=-2+2=0.$$

【标注】【知识点】一元二次方程根与系数的关系

练习

27. 某型号的手机连续两次降价, 每个售价由原来的1185元降到了580元, 设平均每次降价的百分率为 x , 列出方程正确的是 ().
- A. $580(1+x)^2=1185$ B. $1185(1+x)^2=580$ C. $580(1-x)^2=1185$ D. $1185(1-x)^2=580$

【答案】 D

【解析】 设平均每次降价的百分率为 x ,

$$\text{由题意得出方程为: } 1185(1-x)^2=580.$$

故选: D.

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

28. 某企业2018年初获利润300万元, 到2020年初计划利润达到507万元. 设这两年的年利润平均增长率为 x , 应列方程是 ().
- A. $300(1+x)=507$ B. $300(1+x)^2=507$

C. $300(1+x) + 300(1+x)^2 = 507$

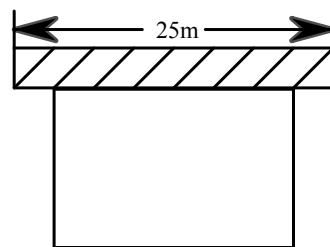
D. $300 + 300(1+x) + 300(1+x)^2 = 507$

【答案】 B**【解析】** 设这两年的年利润平均增长率为 x ,根据题意得： $300(1+x)^2 = 507$.

故选：B.

【标注】【知识点】一元二次方程的增长率问题

29. 如图，要建一个长方形养鸡场，养鸡场的一边靠墙（墙长25米），另三边用竹篱笆围成，竹篱笆的长为40米，若要围成的养鸡场的面积为180平方米，求养鸡场的长、宽各为多少米，设与墙平行的一边长为 x 米.

(1) (用含 x 的代数式表示)另一边长为 _____ 米.

(2) 列出方程，并求出问题的解.

【答案】 (1) $\frac{40-x}{2}$ (2) 长 $(20 - 2\sqrt{10})$ 米，宽是 $(10 + \sqrt{10})$ 米.

【解析】 (1) 设与墙平行的一边长为 x 米，另一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米，
故答案是： $\frac{40-x}{2}$.

(2) 设平行于墙的一边为 x 米，则另一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米，根据题意得：

$$x \cdot \frac{40-x}{2} = 180,$$

整理得出：

$$x^2 - 40x + 360 = 0,$$

$$\text{解得：} x_1 = 20 + 2\sqrt{10}, x_2 = 20 - 2\sqrt{10},$$

由于墙长25米，而 $20 + 2\sqrt{10} > 25$, $\therefore x_1 = 20 + 2\sqrt{10}$ ，不合题意舍去， $\therefore 0 < 20 - 2\sqrt{10} < 25$, $\therefore x_2 = 20 - 2\sqrt{10}$ ，符合题意，

$$\text{此时} \frac{40-x}{2} = 10 + \sqrt{10},$$

答：此时鸡场靠墙的一边长 $(20 - 2\sqrt{10})$ 米，宽是 $(10 + \sqrt{10})$ 米。

【标注】【知识点】一元二次方程的几何问题

30. 水上游艇是七里海湿地风景区特色旅游项目。如果游客选择此项目，风景区可盈利10元/人。旅游旺季平均每天有500人选择此项目。为增加盈利，景区管理人员准备在旅游旺季提高票价，经调查发现，在其他条件不变的情况下，票价每涨1元，消费人员就减少20人。

(1) 现该项目保证每天盈利6000元，同时又要旅游者尽量少花钱，那么票价应涨价多少元？

(2) 若单纯从经济角度看，票价涨价多少元，能使该项目获利最多？

【答案】(1) 每位消费单价应涨价5元。

(2) 单纯从经济角度看，每位消费金额涨价7.5元，能使该项目获利最多。

【解析】(1) 设每位消费单价应涨价 x 元，根据题意得：

$$(10+x)(500-20x) = 6000.$$

$$\text{解方程得：} x_1 = 10, x_2 = 5,$$

∵该项目要保证每天盈利6000元，同时又要旅游者得到实惠，

$$\therefore x = 5,$$

答：每位消费单价应涨价5元。

(2) 设每位消费金额涨价 m 元，能获利 w 元，根据题意得：

$$W = (10+m)(500-20m) = -20m^2 + 300m + 5000,$$

$$\therefore a = -20 < 0,$$

$$\therefore m = -\frac{300}{-2 \times 20} = 7.5 \text{元时，获利最多。}$$

答：单纯从经济角度看，每位消费金额涨价7.5元，能使该项目获利最多。

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

31. 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出20件，每件盈利40元，为了扩大销售，增加利润，尽量减少库存，商场决定采取适当的降价措施。经调查发现，如果每件衬衫每降价1元，商场平均每天可多售出2件。

(1) 若商场平均每天要盈利1200元，每件衬衫应降价多少元。

(2) 每件衬衫降价多少元时，商场平均每天盈利最多。

【答案】(1) 每件衬衫应降价20元。

(2) 每件衬衫降价15元时, 商场平均每天盈利最多, 最大利润为1250元.

【解析】(1) 设每件衬衫应降价 x 元,

根据题意得 $(40 - x)(20 + 2x) = 1200$,

整理得 $2x^2 - 60x + 400 = 0$.

解得 $x_1 = 20$, $x_2 = 10$.

因为要尽量减少库存, 在获利相同的条件下, 降价越多, 销售越快,
故每件衬衫应降20元.

答: 每件衬衫应降价20元.

(2) 设商场平均每天盈利 y 元, 则

$$y = (20 + 2x)(40 - x)$$

$$= -2x^2 + 60x + 800$$

$$= -2(x^2 - 30x - 400)$$

$$= -2[(x - 15)^2 - 625]$$

$$= -2(x - 15)^2 + 1250.$$

$\therefore$ 当 $x = 15$ 时, y 取最大值, 最大值为1250.

答: 每件衬衫降价15元时, 商场平均每天盈利最多, 最大利润为1250元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

二、二次函数

练习

32. 下列函数解析式中, 一定为二次函数的是 ().

A. $y = 3x - 1$

B. $y = ax^2 + bx + c$

C. $s = 2t^2 - 2t + 1$

D. $y = x^2 + \frac{1}{x}$

【答案】C

【解析】 $y = 3x - 1$ 是一次函数, A错误;

$y = ax^2 + bx + c$, 当 $a = 0$ 时, 不是二次函数, B错误;

$s = 2t^2 - 2t + 1$ 是二次函数, C正确;

$y = x^2 + \frac{1}{x}$ 不是二次函数, D错误.

【标注】【知识点】二次函数的定义

33. 二次函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 图象的顶点坐标是 () .

- A. (1, -2) B. (-1, -2) C. (-1, 2) D. (1, 2)

【答案】 D

【解析】 $\because$ 二次函数的顶点式是 $y = a(x - h)^2 + k$, 其中 (h, k) 是这个二次函数的顶点坐标, $\therefore$ 二次函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 图象的顶点坐标是 $(1, 2)$.

【标注】 【知识点】 二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

34. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中, 其函数 y 与自变量 x 之间的部分对应值如下表所示:

点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 在函数的图象上, 则当 $1 < x_1 < 2$, $3 < x_2 < 4$ 时, y_1 与 y_2 的大小关系正确的是 () .

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	4	1	0	1	4	...

- A. $y_1 > y_2$ B. $y_1 < y_2$ C. $y_1 \geq y_2$ D. $y_1 \leq y_2$

【答案】 B

【解析】 根据图表可以看出, 对称轴是 $x = 2$,

$\because$ 当 $1 < x_1 < 2$ 时, $0 < y_1 < 1$, 当 $3 < x_2 < 4$ 时, $1 < y_2 < 4$,

$\therefore y_1 < y_2$.

【标注】 【知识点】 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

35. 二次函数 $y = x^2 + 4x + 6$ 的最小值为 ____ .

【答案】 2

【解析】 配方得: $y = (x + 2)^2 + 2$,

当 $x = -2$ 时, 有最小值2 .

【标注】 【题型】 二次函数其他最值问题

36. 若二次函数 $y = x^2 + bx + 5$ 配方后为 $y = (x - 2)^2 + k$, 则 b 、 k 的值分别为 () .

- A. 0、5 B. 0、1 C. -4、5 D. -4、1

【答案】D

【解析】 $\because y = (x-2)^2 + k = x^2 - 4x + 4 + k$,

又 $\because y = x^2 + bx + 5$,

$\therefore x^2 - 4x + 4 + k = x^2 + bx + 5$,

$\therefore b = -4, k = 1$.

故选D.

【标注】【知识点】二次函数顶点式

37. 关于函数 $y = -3(x+4)^2 + 2$, 下列叙述正确的是().

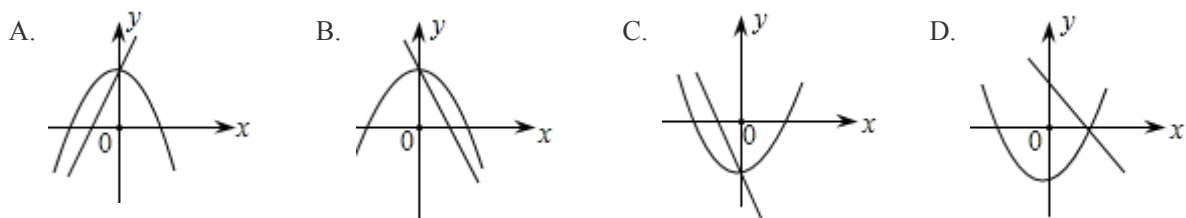
- A. 它的图象是一条关于直线 $x = 4$ 对称的抛物线
- B. 这个函数有最小值是2
- C. 当 $x < 0$ 时, y 随着 x 的增大而增大
- D. 当 $x < -4$ 时, y 随着 x 的增大而增大

【答案】D

【解析】函数 $y = -3(x+4)^2 + 2$ 的图象是一条关于直线 $x = -4$ 对称的抛物线, 所以当 $x < -4$ 时, y 随着 x 的增大而增大, 有最大值是2, 故答案为D.

【标注】【题型】二次函数其他最值问题

38. 在同一直角坐标系中, 一次函数 $y = ax + c$ 和二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可能为().



【答案】B

【解析】依次分析选项可得:

A、分析一次函数 $y = ax + c$ 可得, $a > 0, c > 0$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口应向上; 与图不符.

B、分析一次函数 $y = ax + c$ 可得, $a < 0, c > 0$, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口应向下, 在 y 轴上与一次函数交于同一点; 符合.

C、分析一次函数 $y = ax + c$ 可得， $a < 0$ ， $c < 0$ ，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口应向下；与图不符．

D、一次函数 $y = ax + c$ 和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 常数项相同，在 y 轴上应交于同一点；与图不符．

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

39. 写出一个开口向下，经过点 $(0, 3)$ 的抛物线的表达式 _____ ．

【答案】 答案不唯一

【解析】 由题意可得： $a < 0$ ， $c = 3$ ，

符合题意的解析式可以为： $y = -x^2 + x + 3$ （答案不唯一）．

故答案为： $y = -x^2 + x + 3$ （答案不唯一）．

【标注】【知识点】二次函数一般式

40. 已知二次函数 $y = -(x - 2)^2 + c$ ，当 $x = x_1$ 时，函数值为 y_1 ，当 $x = x_2$ 时，函数值为 y_2 ，若 $|x_1 - 2| > |x_2 - 2|$ ，则 y_1 、 y_2 的大小关系是（ ）．

A. $y_1 < y_2$

B. $y_1 > y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法确定

【答案】 A

【解析】 由题可知，该抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x = 2$ ，图象上越靠近对称轴的点对应的函数值越大．

故选A．

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

41. 若二次函数 $y = 2x^2 - 3$ 的图象上有两个点 $A(-3, m)$ 、 $B(2, n)$ ，则 m _____ n （填“<”或“=”或“>”）．

【答案】 >

【解析】 二次函数 $y = 2x^2 - 3$ 的开口向上，对称轴为 y 轴，点 $A(-3, m)$ 关于对称轴的对称点为 $A'(3, m)$ ，

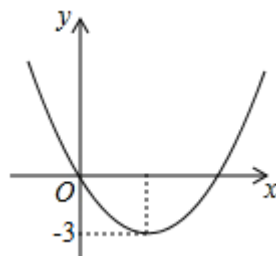
当 $x > 0$ 时，函数随 x 的增大而增大，

$\therefore m > n$ ．也可求出 m ， n 的值进行比较．

【标注】【题型】二次函数增减性

练习

42. 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图象如图，若一元二次方程 $ax^2 + bx - m = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围是_____.



【答案】 $m \geq -3$

【解析】 $\because ax^2 + bx - m = 0$,

$$\therefore ax^2 + bx = m,$$

由二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的顶点纵坐标为 -3 ，且开口向上.

【标注】【题型】图象与系数的关系

43. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 上部分点的横坐标 x ，纵坐标 y 的对应值如下表：

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	0	4	6	6	4	0	...

- (1) 求这个二次函数的表达式及顶点坐标.
(2) 直接写出当 $y < 0$ 时 x 的取值范围.

【答案】(1) 二次函数的表达式为 $y = -x^2 + x + 6$ ，抛物线的顶点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$.

(2) $x < -2$ 或 $x > 3$.

【解析】(1) 由表得，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(0, 6)$,

$$\therefore c = 6.$$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 6$ 过点 $(-1, 4)$ 和 $(1, 6)$,

$$\therefore \begin{cases} a - b + 6 = 4 \\ a + b + 6 = 6 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y = -x^2 + x + 6$.

∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $(0, 6)$ 和 $(1, 6)$,

∴ 抛物线的对称轴方程为 $x = \frac{1}{2}$.

∴ 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{25}{4}$,

∴ 抛物线的顶点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{25}{4})$.

(2) 当 $y < 0$ 时 x 的取值范围是 $x < -2$ 或 $x > 3$.

【标注】【知识点】二次函数一般式

44. 已知：二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 中的 x 和 y 满足下表：

x		0	1	2	3	4	5	
y		3	0	-1	0	m	8	

(1) 可求得 m 的值为 _____ .

(2) 求出这个二次函数的解析式 .

(3) 当 $0 < x < 3$ 时, 则 y 的取值范围为 _____ .

【答案】 (1) 3

(2) $y = x^2 - 4x + 3$.

(3) $-1 \leq y < 3$

【解析】 (1) 由表中数据知, 二次函数对称轴为直线 $x = 2$,

故当 $x = 0$ 和 $x = 4$ 时, y 的值相同 ,

∴ $m = 3$.

(2) 根据题意得:
$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$
 ,

解得:
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$
 .

则函数的解析式是: $y = x^2 - 4x + 3$.

(3) 函数的顶点坐标是: $(2, -1)$,

当 $0 < x < 3$ 时, 则 y 的取值范围为: $-1 \leq y < 3$.

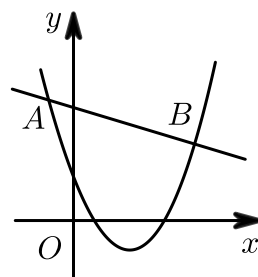
【标注】【知识点】探究函数性质

【知识点】函数值

【知识点】二次函数一般式

45.

已知二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与一次函数 $y_2 = kx + m$ ($k \neq 0$) 的图象相交于点 $A(-2, 4)$ 、 $B(8, 2)$ (如图所示) , 则能使 $y_1 > y_2$ 成立的 x 的取值范围是 _____ .



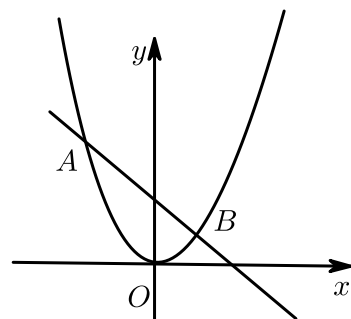
【答案】 $x < -2$ 或 $x > 8$

【解析】 由题意知抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 和一次函数 $y_2 = kx + m$ ($k \neq 0$) 的交点横坐标分别为 -2 , 8

当 $y_1 > y_2$ 时 , 由题图可知 x 的取值范围为 $x < -2$ 或 $x > 8$.

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

46. 如图 , 抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = bx + c$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$, 则关于 x 的方程 $ax^2 - bx - c = 0$ 的解为 _____ .



【答案】 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

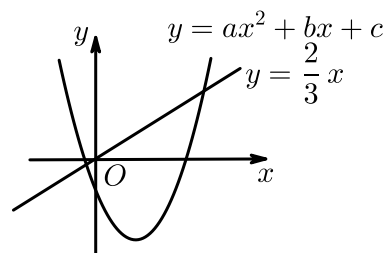
【解析】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = bx + c$ 的交点坐标为 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$,

$\therefore$ 方程 $ax^2 = bx + c$ 的解为 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$,

即方程 $ax^2 - bx - c = 0$ 的解为 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

【标注】 【知识点】 一次函数与二次函数的交点

47. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 和正比例函数 $y = \frac{2}{3}x$ 的图象如图所示 , 则方程 $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根之和 () .



- A. 大于0 B. 等于0 C. 小于0 D. 不能确定

【答案】 A

【解析】 解法一：

由函数图象可知，方程 $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 和函数 $y = \frac{2}{3}x$ 的交点横坐标，
易得，两根之和大于0。

解法二：

设 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 x_1, x_2 。

$\because$ 由二次函数的图象可知 $x_1 + x_2 > 0, a > 0$,

$\therefore -\frac{b}{a} > 0$ 。

设方程 $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根为 x_3, x_4 ，

则 $x_3 + x_4 = \frac{-b - \frac{2}{3}}{a} = -\frac{b}{a} + \frac{2}{3a}$ ，

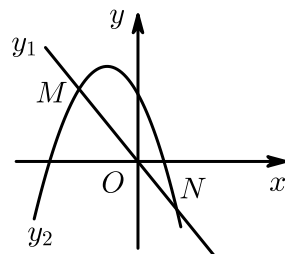
$\because a > 0$ ，

$\therefore \frac{2}{3a} > 0$ ，

$\therefore x_3 + x_4 > 0$ 。

【标注】 【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

48. 如图，一次函数 $y = -x$ 与二次函数为 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象相交于点 M, N ，则关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + (b+1)x + c = 0$ 的根的情况是 ()。



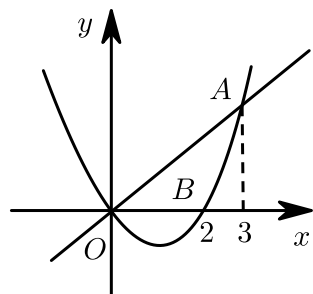
- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数
C. 没有实数根 D. 以上结论都正确

【答案】A

【解析】方程的根即为两函数交点的横坐标，图象显示两函数有两个交点，所以方程有两个不相等的实数根，故答案为A.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

49. 如图，已知二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$ ，与 x 轴交于点 $B(2, 0)$ ，若 $0 < y_1 < y_2$ ，则 x 的取值范围是() .



A. $0 < x < 2$

B. $0 < x < 3$

C. $2 < x < 3$

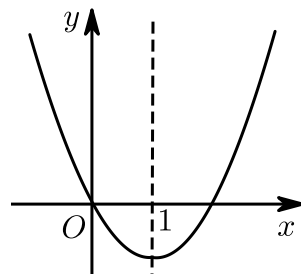
D. $x < 0$ 或 $x > 3$

【答案】C

【解析】 $\because$ 二次函数 $y_1 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$ 的图象与正比例函数 $y_2 = \frac{2}{3}x$ 的图象交于点 $A(3, 2)$ ，与 x 轴交于点 $B(2, 0)$ ，
 $\therefore$ 由图象得：若 $0 < y_1 < y_2$ ，则 x 的取值范围是： $2 < x < 3$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

50. 二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图象如图，对称轴为直线 $x = 1$ ，若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx - t = 0$ (t 为实数) 在 $-1 < x < 4$ 的范围内有解，则 t 的取值范围是() .



A. $t \geq -1$

B. $-1 \leq t < 3$

C. $-1 \leq t < 8$

D. $3 < t < 8$

【答案】C

【解析】对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2 \times 1} = 1$ ，解得 $b = -2$ ，

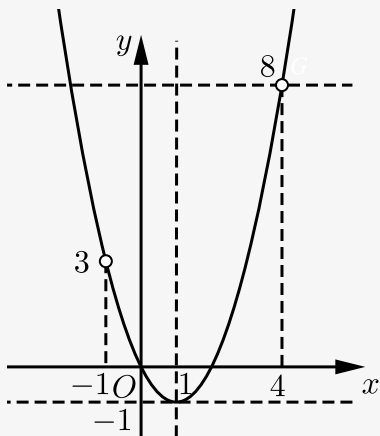
所以，二次函数解析式为 $y = x^2 - 2x$ ， $y = (x - 1)^2 - 1$ ，

当 $x = -1$ 时， $y = 1 + 2 = 3$ ；当 $x = 4$ 时， $y = 16 - 2 \times 4 = 8$ ，

$\therefore x^2 + bx - t = 0$ 相当于 $y = x^2 + bx$ 与直线 $y = t$ 的交点的横坐标，

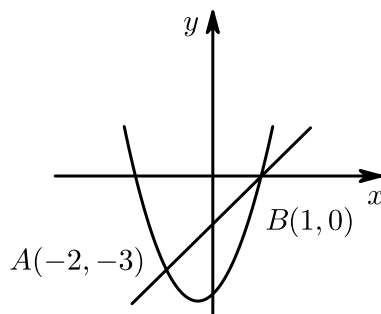
$\therefore$ 当 $-1 \leq t < 8$ 时，在 $-1 < x < 4$ 的范围内有解。

故选 C。



【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

51. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 和一次函数 $y = x - 1$ 的图象交于 $A(-2, -3)$ 、 $B(1, 0)$ 两点，则方程 $ax^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$ 的根为 ()。



- A. $x_1 = -2, x_2 = -3$ B. $x_1 = 1, x_2 = 0$ C. $x_1 = -2, x_2 = 1$ D. $x_1 = -3, x_2 = 0$

【答案】C

【解析】 $\because ax^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$ ，

$\therefore ax^2 + bx + c = x - 1$ ，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$ 的根即为二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 和一次函数 $y = x - 1$ 的图象交点的横坐标，

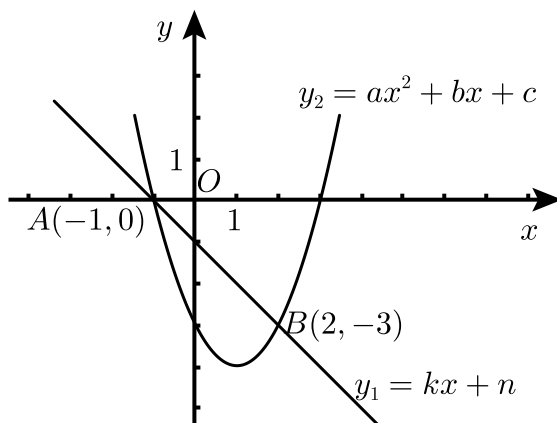
$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 和一次函数 $y = x - 1$ 的图象交于 $A(-2, -3)$ 、 $B(1, 0)$ 两点，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + (b - 1)x + c + 1 = 0$ 的根为 $x_1 = -2, x_2 = 1$ ，

故选C.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

52. 如图, 直线 $y_1 = kx + n (k \neq 0)$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 分别交于 $A(-1, 0)$, $B(2, -3)$ 两点, 那么当 $y_1 > y_2$ 时, x 的取值范围是 _____.



【答案】 $-1 < x < 2$

【解析】因为直线 $y_1 = kx + n (k \neq 0)$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 分别交于 $A(-1, 0)$, $B(2, -3)$ 两点, 所以当 $y_1 > y_2$ 时, $-1 < x < 2$. 故答案为: $-1 < x < 2$.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

练习

53. 已知函数 $y_1 = a - x^2 (1 \leq x \leq 2)$ 图象上某点 P , 其关于 x 轴的对称点在函数 $y_2 = x + 1$ 的图象上, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $a \geq -\frac{5}{4}$ B. $1 \leq a \leq 2$ C. $-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$ D. $-1 \leq a \leq 1$

【答案】D

【解析】若函数 $y_1 = a - x^2 (1 \leq x \leq 2)$ 图象上某点关于 x 轴的对称点在函数 $y_2 = x + 1$ 的图象上, 则方程 $a - x^2 = -(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = a$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 范围内有解. 令 $y = x^2 - x - 1 (1 \leq x \leq 2)$, 由 $y = x^2 - x - 1$ 的图象是开口朝上, 且以直线 $x = \frac{1}{2}$ 为对称轴的抛物线, 故当 $x = 1$ 时, y 有最小值 -1 , 当 $x = 2$ 时, y 有最大值 1 , 故 $-1 \leq a \leq 1$.

【标注】【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

54. 已知抛物线 $y = x^2 - 6x + 5$ ，则其关于 y 轴对称的抛物线的表达式为 _____；关于 x 轴对称的抛物线的表达式为 _____；关于原点对称的抛物线的表达式为 _____。

【答案】 $y = x^2 + 6x + 5$ ； $y = -x^2 + 6x - 5$ ； $y = -x^2 - 6x - 5$

【解析】 二次函数解析式转化为顶点式为 $y = (x - 3)^2 - 4$ ，顶点坐标为 $(3, -4)$ ，

关于 y 轴对称后顶点坐标为 $(-3, -4)$ ，开口大小和方向不变，

则对称后的解析式是 $y = (x + 3)^2 - 4$ ，即 $y = x^2 + 6x + 5$ ；

关于 x 轴对称后顶点坐标为 $(3, 4)$ ，开口大小不变，方向改变，

则对称后的解析式是 $y = -(x - 3)^2 + 4$ ，即 $y = -x^2 + 6x - 5$ ；

关于原点对称后顶点坐标为 $(-3, 4)$ ，开口大小不变，方向改变，

则对称后的解析式是 $y = -(x + 3)^2 + 4$ ，即 $y = -x^2 - 6x - 5$ 。

【标注】【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

55. 若将抛物线 $y = x^2 + 2$ 先向右平移2个单位长度，再向下平移2个单位长度，则所得到的抛物线的顶点坐标是（ ）。

A. $(2, 0)$

B. $(-2, 0)$

C. $(0, 2)$

D. $(0, 4)$

【答案】 A

【解析】 将抛物线 $y = x^2 + 2$ 先向右平移2个单位长度，再向下平移2个单位长度，得到

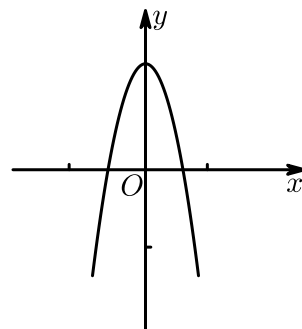
$y = (x - 2)^2 + 2 - 2$ ，整理得 $y = (x - 2)^2$ ，该抛物线的顶点坐标是 $(2, 0)$ 。

故选A。

【标注】【知识点】二次函数平移变换

【能力】运算能力

56. 二次函数 $y = -3x^2 + 1$ 的图象如图所示，将其沿 x 轴翻折后得到的抛物线的解析式为 _____。



【答案】 $y = 3x^2 - 1$

【解析】 $y = -3x^2 + 1$ 顶点为 $(0, 1)$ 关于 x 轴对称，对应点 $(0, -1)$ ，
对称前后 a 互为相反数，则 $y = 3x^2 - 1$ 。

【标注】【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

57. 将抛物线 $y = 2x^2$ 经过怎样的平移可得到抛物线 $y = 2(x + 3)^2 + 4$ ？答：()。

- A. 先向左平移3个单位，再向上平移4个单位 B. 先向左平移3个单位，再向下平移4个单位
C. 先向右平移3个单位，再向上平移4个单位 D. 先向右平移3个单位，再向下平移4个单位

【答案】 A

【解析】 $\because$ 抛物线 $y = 2x^2$ 的顶点坐标为 $(0, 0)$ ，抛物线 $y = 2(x + 3)^2 + 4$ 的顶点坐标为 $(-3, 4)$ ，
 $\therefore$ 先向左平移3个单位，再向上平移4个单位。

【标注】【知识点】二次函数平移变换

58. 若二次函数 $y = x^2 + bx$ 的图象的对称轴是直线 $x = -2$ ，则关于 x 的方程 $x^2 + bx = 0$ 的解为 ()。

- A. $x_1 = 0, x_2 = -4$ B. $x_1 = 0, x_2 = 4$ C. $x_1 = 1, x_2 = -5$ D. $x_1 = -1, x_2 = 5$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 对称轴是直线 $x = -2$ ，
 $\therefore -\frac{b}{2a} = -2, a = 1$ 。
解得 $b = 4$ 。
解方程 $x^2 - 4x = 0$ ，
解得 $x_1 = 0, x_2 = -4$ 。

【标注】【题型】图象与系数的关系

59. 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y = x^2 - 4$ 先向右平移2个单位，再向上平移2个单位，得到的抛物线解析式为（ ）.

- A. $y = (x + 2)^2 + 2$ B. $y = (x - 2)^2 - 2$ C. $y = (x - 2)^2 + 2$ D. $y = (x + 2)^2 - 2$

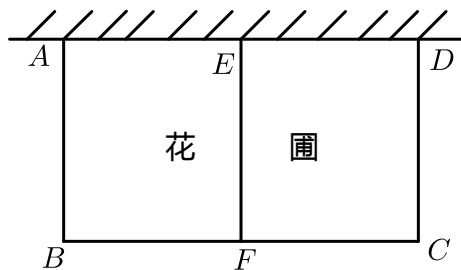
【答案】 B

【解析】 依据“左加右减，上加下减”， $y = x^2 - 4$ 再向右平移2个单位，再向上平移2个单位后为 $y = (x - 2)^2 - 4 + 2$ ，所以 $y = (x - 2)^2 - 2$ ，故答案为B.

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

练习

60. 学校要围一个矩形花圃，其一边利用足够长的墙，另三边用篱笆围成，由于园艺需要，还要用一段篱笆将花圃分隔为两个小矩形部分（如图所示），总共36米的篱笆恰好用完（不考虑损耗）. 设矩形垂直于墙面的一边 AB 的长为 x 米（要求 $AB < AD$ ），矩形花圃 $ABCD$ 的面积为 S 平方米.



- (1) 求 S 与 x 之间的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围.
 (2) 要想使矩形花圃 $ABCD$ 的面积最大， AB 边的长应为多少米？

【答案】 (1) $S = -3x^2 + 36x (0 < x < 9)$.

(2) 要想使矩形花圃 $ABCD$ 的面积最大， AB 边的长应为6米.

【解析】 (1) 由题意得： $AB = x$ ， $BC = 36 - 3x$ ，

$$S = AB \cdot BC = x(36 - 3x) = -3x^2 + 36x (0 < x < 9),$$

即 S 与 x 之间的函数关系式为： $S = -3x^2 + 36x (0 < x < 9)$

(2) $S = -3x^2 + 36x = -3(x - 6)^2 + 108$,

$$\because 0 < 6 < 9,$$

$\therefore x = 6$ 时， S 取得最大值108.

答：要想使矩形花圃 $ABCD$ 的面积最大， AB 边的长应为6米.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

61. 某汽车租赁公司拥有20辆汽车．据统计，当每辆车的日租金为400元时，可全部租出；当每辆车的日租金每增加50元，未租出的车将增加1辆；公司平均每日的各项支出共4800元．设公司每日租出 x 辆车时，日收益为 y 元（日收益=日租金收入-平均每日各项支出）．

- （1）公司每日租16辆车时，每辆车的日租金为 _____ 元；公司每日租 x 辆车时，每辆车的日租金为 _____ 元（用含 x 的代数式表示）．
- （2）当每日租出多少辆时，租赁公司日收益最大？最大是多少元？

【答案】（1）600； $1400 - 50x$

（2）当日租出14辆时，租赁公司日收益最大，最大值为5000元．

【解析】（1）∵某汽车租赁公司拥有20辆汽车．

据统计，当每辆车的日租金为400元时，可全部租出；

当每辆车的日租金每增加50元，未租出的车将增加1辆；

∴当全部未租出时，每辆租金为： $400 + 20 \times 50 = 1400$ 元，

∴公司每日租出 x 辆车时，每辆车的日租金为： $1400 - 50x$ ，公司每日租16辆车时，每辆车的日租金为600元．

（2）根据题意得出：

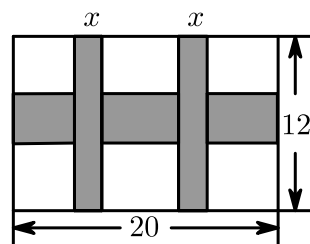
$$y = x(-50x + 1400) - 4800 = -50x^2 + 1400x - 4800 = -50(x - 14)^2 + 5000,$$

当 $x = 14$ 时，在范围内， y 有最大值5000．

∴当日租出14辆时，租赁公司日收益最大，最大值为5000元．

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

62. 一幅长20cm、宽12cm的图案，如图，其中有一横两竖的彩条，横、竖彩条的宽度比为3：2．设竖彩条的宽度为 x cm，图案中三条彩条所占面积为 y cm²．



- （1）求 y 与 x 之间的函数关系式．
- （2）若图案中三条彩条所占面积是图案面积的 $\frac{2}{5}$ ，求横、竖彩条的宽度．

【答案】(1) $y = -3x^2 + 54x$.

(2) 横彩条的宽度为3cm, 竖彩条的宽度为2cm.

【解析】(1) 根据题意可知, 横彩条的宽度为 $\frac{3}{2}x$ cm,

$$\therefore y = 20 \times \frac{3}{2}x + 2 \times 12 \cdot x - 2 \times \frac{3}{2}x \cdot x = -3x^2 + 54x,$$

即 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = -3x^2 + 54x$.

(2) 根据题意, 得: $-3x^2 + 54x = \frac{2}{5} \times 20 \times 12$,

$$\text{整理, 得: } x^2 - 18x + 32 = 0,$$

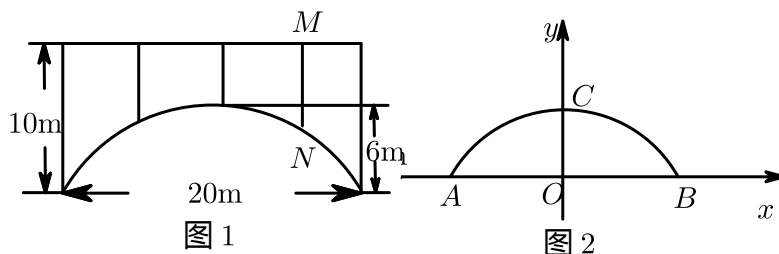
解得: $x_1 = 2, x_2 = 16$ (舍),

$$\therefore \frac{3}{2}x = 3,$$

答: 横彩条的宽度为3cm, 竖彩条的宽度为2cm.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

63. 一座拱桥的轮廓是抛物线型(如图1所示), 拱高6m, 跨度20m, 相邻两支柱间的距离均为5m.



(1) 将抛物线放在所给的直角坐标系中(如图2所示), 其表达式是 $y = ax^2 + c$ 的形式. 请根据所给的数据求出 a, c 的值.

(2) 求支柱 MN 的长度.

(3) 拱桥下地平面是双向行车道(正中间是一条宽2m的隔离带), 其中的一条行车道能否并排行驶宽2m、高3m的三辆汽车(汽车间的间隔忽略不计)? 请说说你的理由.

【答案】(1) $a = -\frac{3}{50}, c = 6$.

(2) 支柱 MN 的长度是5.5米.

(3) 一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车.

【解析】(1) 根据题目条件, A, B, C 的坐标分别是 $(-10, 0), (10, 0), (0, 6)$.

$$\text{将 } B, C \text{ 的坐标代入 } y = ax^2 + c, \text{ 得 } \begin{cases} 6 = c \\ 0 = 100a + c \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -\frac{3}{50}, c = 6.$$

$$\text{所以抛物线的表达式是 } y = -\frac{3}{50}x^2 + 6.$$

(2) 可设 $N(5, y_N)$, 于是 $y_N = -\frac{3}{50} \times 5^2 + 6 = 4.5$.

从而支柱 MN 的长度是 $10 - 4.5 = 5.5$ 米.

(3) 设 DE 是隔离带的宽, EG 是三辆车的宽度和, 则 G 点坐标是 $(7, 0)$,

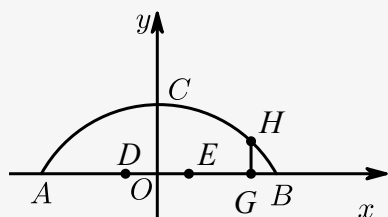


图 2

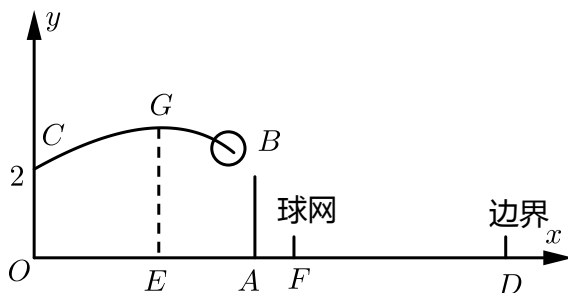
$(7 = 2 \div 2 + 2 \times 3)$.

过 G 点作 GH 垂直 AB 交抛物线于 H , 则 $y_H = -\frac{3}{50} \times 7^2 + 6 = 3 + \frac{3}{50} > 3$.

根据抛物线的特点, 可知一条行车道能并排行驶这样的三辆汽车.

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

64. 如图, 女子排球场的长度 OD 为 18m , 位于排球中线处网的高度 AB 为 2.24m , 一队员站在点 O 处发球, 排球从点 O 的正上方 2m 的 C 点向正前方飞出, 当排球运行至离点 O 的水平距离 OE 为 6m 时到达最高点 G . 将排球看成一个点, 它运动的轨迹是抛物线, 建立如图所示的平面直角坐标系.



- (1) 当球上升的最大高度为 3m 时, 求排球飞行的高度 y (单位: m) 与水平距离 x (单位: m) 的函数关系式 (不要求写自变量 x 的取值范围).
- (2) 在(1)的条件下, 对方距球网 1m 的点 F 处有一队员, 他起跳后的最大高度为 2.7m , 问这次他是否可以拦网成功? 请通过计算说明.
- (3) 若队员发球既要过网, 又不出界, 问排球飞行的最大高度 $h(\text{m})$ 的取值范围是 _____ (排球压线属于没出界).

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{36}(x - 6)^2 + 3$.

(2) 这次可以拦网成功.

(3) $h \geq \frac{8}{3}$

【解析】 (1) 顶点 $G(6, 3)$,

设 $y = a(x - 6)^2 + 3$,

把 $C(0,2)$ 代入得 $2 = a(0-6)^2 + 3$

$$a = -\frac{1}{36},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{36}(x-6)^2 + 3.$$

(2) 由题意可知： $OD = 18$,

$$\therefore OB = 9, OF = 9 + 1 = 10,$$

$$\text{当 } x = 10 \text{ 时, } y = -\frac{1}{36}(10-6)^2 + 3$$

$$= 2.56 < 2.7,$$

$\therefore$ 这次可以拦网成功.

(3) 设 $y = a(x-6)^2 + h$,

将 $C(0,2)$ 代入得：

$$a(0+6)^2 + h = 2$$

$$a = \frac{2-h}{36},$$

$$\therefore y = \frac{2-h}{36}(x-6)^2 + h,$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{2-h}{36}(9-6)^2 + h > 2.24 \\ \frac{2-h}{36}(18-6)^2 + h \leq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} h \geq \frac{8}{3}.$$

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题